ÜBER EINIGE NEUE EIGENSCHAFTEN

DER

KUGELFUNCTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN

UND DER

COEFFICIENTEN VON REIHEN, WELCHE NACH KUGELFUNCTIONEN ENTWICKELT SIND.

VON

DR. ANTON WINCKLER,
PROFESSOR IN GRATZ.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 20. MÄRZ 1860.

Es ist bekannt, dass die merkwürdigen Eigenschaften der Functionen X_0, X_1, X_2, . . . welche in der Entwickelung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_n z^n + \ldots$$

auftreten und welche gewöhnlich Kugelfunctionen einer Veränderlichen genannt werden, zuerst von Legendre gelegentlich seiner Untersuchungen über die Attraction der Sphäroide und die Gestalt der Planeten gefunden, in den „Savans étrangers" Tom. X und „Mém. de l'Acad." ann. 1784 et 1789 veröffentlicht und später in den Exerc. de calc. intégr. 5ème Partie p. 247 zusammengestellt worden sind. Diese Functionen sind bis in die neueste Zeit Gegenstand der Untersuchung geblieben, wozu nicht blos ihre von Legendre nachgewiesene analytische Bedeutung, sondern auch die tiefgehende Verallgemeinerung ihrer Theorie durch Laplace in der Mechanik des Himmels und ihr Auftreten in ganz anderen Untersuchungen, wie z. B. in der Gauss'schen Abhandlung: „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi" und in der Theorie der hypergeometrischen Reihen Veranlassung gegeben hat.

Im Folgenden werde ich einige, meines Wissens nicht bekannte neue Eigenschaften dieser Functionen nachweisen, hierauf einige Methoden bezeichnen, durch welche die Entwickelung gegebener Functionen in Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten, in vielen Fällen erleichtert wird, und zum Schlusse werde ich einige Eigenschaften der Coëfficienten solcher Reihen darlegen.

Die in zahlreichen Abhandlungen zerstreut vorkommenden Resultate, welche sich auf die in Rede stehenden Functionen beziehen, werde ich, wo es ihrer bedarf, entweder als bekannt voraussetzen oder durch neue Verfahrungsarten direct ableiten, in allen Fällen aber bereits bekannte Resultate als solche ausdrücklich bezeichnen.

1.

Die allgemeine Form der Kugelfunctionen einer Veränderlichen ist durch die Gleichung

$$X_n = \frac{1.3.5..(2n-1)}{1.2.3...n}\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right\}$$

gegeben und für alle positiven Werthe von n bestimmt; auch für $n = 0$ kann man den Werth von X angeben, es ist nämlich $X_0 = 1$. Für manche Betrachtungen ist es jedoch zweckmässig, die Bedeutung von X_n auch für negative ganze Werthe von n festzustellen. So wie X_n als Coëfficient von z^n in der Entwickelung von $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach positiven Potenzen von z definirt worden ist, so sei nun X_{-n} der Coëfficient von z^{-n} in der absteigenden Entwickelung oder also

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = X_{-1}z^{-1} + X_{-2}z^{-2} + X_{-3}z^{-3} + \ldots + X_{-n}z^{-n} + X_{-n-1}z^{-n-1} + \ldots$$

und es handelt sich jetzt darum, die Coëfficienten dieser Entwickelung durch jene der früheren zu bestimmen. Dies geschieht sehr leicht, wenn man bemerkt, dass, wenn in der aufsteigenden $\frac{1}{z}$ für z gesetzt wird, dieselbe in die folgende

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = X_0z^{-1} + X_1z^{-2} + X_2z^{-3} + \ldots + X_{n-1}z^{-n} + X_nz^{-n-1} + \ldots$$

übergeht und dass, wenn man nun diese beiden letzteren absteigenden Entwickelungen vergleicht, die gesuchte Relation

$$X_{-n} = X_{n-1} \quad \text{oder} \quad X_{+n} = X_{-(n+1)}$$

sich ergibt.

Die Grenzen, zwischen welchen sich die Zahlenwerthe von X_n befinden, sind in der Regel diejenigen, für welche $x = -1$ und $x = +1$ ist, und es ist bekannt, dass

$$X_n = +1 \text{ für } x = +1 \quad \text{und} \quad X_n = (-1)^n \text{ für } x = -1$$

Ich füge hinzu, dass $X_n = 0$ für $x = 0$, wenn n eine ungerade Zahl ist, dagegen $X_n = (-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1.3.5...(n-1)}{2.4.6...n}$ für $x = 0$, wenn n eine gerade Zahl ist.

2.

Die gemeinschaftliche Quelle der wichtigeren Eigenschaften der Function X_n bilden die Gleichungen, welche sich zwischen den partiellen Differentialquotienten sowohl der ersten als der zweiten Ordnung der Function

$$u = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1z + X_2z^2 + \ldots + X_nz^n + \ldots$$

bezüglich der Grössen x und z aufstellen lassen. Diese Gleichungen hat bereits Legendre a. a. O. benutzt, ohne aber alle Resultate, welche sie zu liefern im Stande sind, daraus zu ziehen. Wie man leicht einsieht, ergibt sich durch partielles Differentiiren

$$\frac{du}{dz} = (x-z)\, u^3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = zu^3$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -u^3 + 3u^2(x-z)\frac{du}{dz}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = 3zu^2\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dz} = u^3 + 3u^2z\frac{du}{dz}.$$

Zieht man zuerst die Differentialquotienten erster Ordnung in Betracht, so gelangt man zu der Gleichung

$$\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dz} = (x-z)\, u$$

aus welcher sich, da rechter Hand

$$\frac{1}{u^2} = 1 - 2xz + z^2$$

und linker Hand für u die entsprechende Reihe gesetzt werden kann, weiter die Gleichung

$$(1-2xz+z^2)\Big[X_1 + 2zX_2 + 3z^2X_3 + \ldots + nz^{n-1}X_n + \ldots\Big] = (x-z)\Big[X_0 + X_1z + X_2z^2 + \ldots + X_nz^n + \ldots\Big]$$

ergibt, die sofort nur bestehen kann, wenn

$$nX_n - 2(n-1)\,xX_{n-1} + (n-2)\,X_{n-2} = xX_{n-1} - X_{n-2}$$

ist. Wie man bemerkt, lässt sich diese Bedingung unter verschiedenen Formen darstellen, welche der späteren Anwendung wegen angeführt werden mögen. Dieselben sind:

$$nX_n - (2n-1)\,xX_{n-1} + (n-1)\,X_{n-2} = 0$$

$$xX_n = \frac{n}{2n+1}X_{n-1} + \frac{n+1}{2n+1}X_{n+1}$$

$$xX_n - X_{n-1} = \frac{n+1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1}) \quad \text{oder} \quad n(xX_n - X_{n-1}) + (n+1)(xX_n - X_{n+1}) = 0$$

Sie stellen insgesammt die bekannte Beziehung zwischen drei auf einander folgenden Functionswerthen dar.

Da ferner

$$\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dx} = zu$$

so folgt in ähnlicher Art wie oben die Gleichung

$$(1-2xz+z^2)\left[\frac{dX_0}{dx} + z\frac{dX_1}{dx} + z^2\frac{dX_2}{dx} + \ldots + z^n\frac{dX_n}{dx} + \ldots\right] = z\left[X_0 + X_1z + X_2z^2 + \ldots + X_nz^n + \ldots\right]$$

welche nur unter der Bedingung bestehen kann, dass

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} - 2x\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx} = X_n$$

oder

$$\frac{d\,(X_{n+1}+X_{n-1})}{dx} = X_n + 2x\frac{dX_n}{dx}$$

ist. —

Verbindet man die beiden bisher benutzten Differentialquotienten unter gleichzeitiger Elimination von u^3 mit einander, so entsteht die Gleichung

$$(x-z)\frac{du}{dx} = z\frac{du}{dz}$$

welche durch Einführung der Reihenform in

$$(x-z)\left[\frac{dX_0}{dx} + z\frac{dX_1}{dx} + z^2\frac{dX_2}{dx} + \ldots + z^n\frac{dX_n}{dx} + \ldots\right] = z\left[X_1 + 2zX_2 + 3z^2X_3 + \ldots + nz^{n-1}X_n + \ldots\right]$$

übergeht und als nothwendige Bedingung fordert, dass

$$x\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = nX_n$$

Man kann derselben eine andere Gestalt geben, wenn man bemerkt, dass der Ausdruck linker Hand, nämlich

$$x\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = \frac{d\,(xX_n - X_{n-1})}{dx} - X_n$$

und also mit Rücksicht auf weiter oben gefundene Relationen

$$\frac{d\,(xX_n - X_{n-1})}{dx} = (n+1)\,X_n = \frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx}\right)$$

Die hierin enthaltene Gleichung

$$\frac{d(X_{n+1} - X_{n-1})}{dx} = (2n+1)\,X_n$$

welche für die vorliegenden Betrachtungen von besonderer Wichtigkeit ist, wurde meines Wissens zuerst von Christoffel in der Abhandlung über die „Gauss'sche Quadratur" (Crelle, Journal Bd. 55, S. 67) jedoch auf einem von dem obigen verschiedenen Wege gefunden. — Es ist nicht ohne Interesse, dazu auch noch auf einem andern Wege und zwar direct von der Darstellung der Function X_n aus zu gelangen, welche zuerst Ivory und später auch Jacobi (Crelle, Journal Bd. 2, S. 224) fand, und wonach

$$X_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{d^n\,(x^2-1)^n}{dx^n}$$

ist.

Differentiirt man diese Gleichung, so erfolgt:

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{2n}{2.4\ldots(2n-2)}\cdot\frac{d^n.\,x\,(x^2-1)^{n-1}}{dx^n}$$

oder, wenn man eine der angezeigten Differentiationen in der That ausführt:

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{1}{2.4..(2n-2)}\cdot\frac{d^{n-1}\left[(x^2-1)^{n-2}\,(x^2-1+(2n-2)x^2)\right]}{dx^{n-1}}$$

folglich, wenn man den Ausdruck rechter Hand in zwei Theile zerlegt

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{2n-1}{2 \,.\, \ldots (2n-2)} \frac{d^{n-1} . (x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-1}} + \frac{1}{2 \,.\, 4 \ldots (2n-4)} \cdot \frac{d^{n-1} (x^2-1)^{n-2}}{dx^{n-1}}$$

Daraus ergibt sich nun ohne Weiteres die Gleichung

$$\frac{dX_n}{dx} = (2n-1)\, X_{n-1} + \frac{dX_{n-2}}{dx}$$

welche mit der oben erhaltenen zusammenfällt.

Setzt man nun in derselben nach einander $n-2$, $n-4$, $n-6$, . . für n und addirt dann alle sich daraus ergebenden Gleichungen, so wird man finden:

Wenn n gerade

$$\frac{dX_n}{dx} = (2n-1)\, X_{n-1} + (2n-5)\, X_{n-3} + (2n-9)\, X_{n-5} + \ldots + 3X_1$$

Wenn n ungerade

$$\frac{dX_n}{dx} = (2n-1)\, X_{n-1} + (2n-5)\, X_{n-3} + (2n-9)\, X_{n-5} + \ldots + 5X_2 + 1$$

welche Gleichung sich ebenfalls in der oben bezeichneten Abhandlung, ohne die Unterscheidung ob n gerade oder ungerade ist, angeführt findet.

Mit Rücksicht auf die weiter oben erhaltene Gleichung

$$x \frac{dX_n}{dx} = nX_n + \frac{dX_{n-1}}{dx}$$

ergibt sich hieraus auch die Relation

$$x \frac{dX_n}{dx} = nX_n + (2n-3)\, X_{n-2} + (2n-7)\, X_{n-4} + (2n-11)\, X_{n-6} + \ldots$$

Von den Gleichungen zwischen höheren Differentialquotienten lässt sich die folgende hervorheben. Differentiirt man nämlich die oben gefundene Gleichung

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} - 2x \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx} = X_n$$

$(r-1)$ mal nach einander, so ergibt sich

$$\frac{d^r X_{n+1}}{dx^r} - 2x \frac{d^r X_n}{dx^r} + \frac{d^r X_{n-1}}{dx^r} = (2r-1) \frac{d^{r-1} X_n}{dx^{r-1}}$$

woraus hervorgeht, dass, wenn man die Ordnungszahl der Differentiationen in jedem Gliede um eine beliebige Anzahl $r-1$ erhöht, dadurch weiter nichts geändert wird, als dass die rechte Seite der Gleichung $2\,(r-1)$ mal mehr in Rechnung gebracht werden muss.

3.

Ausser den bereits benutzten Relationen zwischen den Differentialquotienten von u sind noch die folgenden von besonderer Bedeutung, die sich aus der Bemerkung ergeben, dass

$$(x-z)^2 = \frac{1}{u^2} - (1-x^2)$$

und dass, wenn man die im vorigen Art. gefundene Gleichung

$$(x-z)\frac{du}{dx}=z\frac{du}{dz}$$

auf beiden Seiten mit $(x-z)$ multiplicirt, die Gleichung

$$\left[\frac{1}{u^2}-(1-x^2)\right]\frac{du}{dx}=z\,(x-z)\frac{du}{dz}$$

entsteht. Diese letztere in Verbindung mit der bereits gefundenen Relation

$$\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{dx}=u\,.\,z$$

gibt sofort

$$(1-x^2)\frac{du}{dx}=uz-z\,(x-z)\frac{du}{dz}$$

oder endlich

$$\frac{1-x^2}{z}\,\frac{du}{dx}=u-(x-z)\frac{du}{dz}$$

Setzt man nun in dieser Gleichung die Reihe für u, so geht sie über in

$$(1-x^2)\left[\frac{dX_1}{dx}+z\frac{dX_2}{dx}+z^2\frac{dX_3}{dx}+\ldots+z^{n-1}\frac{dX_n}{dx}+\ldots\right]$$
$$=X_0+X_1z+\ldots+X_{n-1}z^{n-1}+\ldots-(x-2)\left[X_1+2zX_2+\ldots+nz^{n-1}X_n+\ldots\right]$$

und diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$$(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}=X_{n-1}-nxX_n+(n-1)X_{n-1}$$

oder

$$(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}=n\,(X_{n-1}-xX_n)$$

Berücksichtigt man ausserdem die Gleichungen des vorigen Artikels, so lässt sich diese Bedingung auch die folgende Form geben

$$(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}=n\,(X_{n-1}-xX_n)=(n+1)\,(xX_n-X_{n+1})=\frac{n\,(n+1)}{2n+1}\,(X_{n-1}-X_{n+1})$$

Differentiirt man die letztere Gleichung, so findet sich

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2}-2x\frac{dX_n}{dx}=\frac{n\,(n+1)}{2n+1}\,\frac{d\,(X_{n-1}-X_{n+1})}{dx}$$

Da aber im vorigen Artikel sich die Gleichung

$$\frac{d\,(X_{n-1}-X_{n+1})}{dx}=-(2n+1)\,X_n$$

ergeben hat, so folgt

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2}-2x\frac{dX_n}{dx}+n\,(n+1)\,X_n=0$$

oder durch eine leichte Umformung

$$\frac{d\left[(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}\right]}{dx}+n\,(n+1)\,X_n=0$$

Die beiden letzteren Gleichungen, welche zuerst Legendre a. a. O. auf anderm Wege fand, sind die Differentialgleichungen der Function X_n

4.

So wie im Vorhergehenden Beziehungen zwischen drei aufeinander folgenden Functionswerthen gefunden worden sind, so lassen sich auch solche zwischen einer grössern Anzahl derselben finden. Einige hierher gehörige Fälle verdienen bemerkt zu werden. Aus der Gleichung für u folgt sogleich

$$1 = (1-2xz+z^2)\left[X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_n z^n + \ldots\right]^2$$

und da diese nur bestehen kann, wenn sowohl der Coëfficient von z^{2n} als auch jener von z^{2n+1} für sich gleich Null ist, so folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}X_n^2 + X_{n-1}X_{n+1} + X_{n-2}X_{n+2} + X_{n-3}X_{n+3} + \ldots \\ &+ \frac{1}{2}X_{n-1}^2 + X_{n-2}X_n + X_{n-3}X_{n+1} + X_{n-4}X_{n+2} + \ldots \\ &= 2x\left[X_{n-1}X_n + X_{n-2}X_{n+1} + X_{n-3}X_{n+2} + \ldots\right] \end{aligned}$$

so wie auch

$$\begin{aligned} &X_{n-1}X_n + X_{n-2}X_{n+1} + X_{n-3}X_{n+2} + \ldots \\ &+ X_n X_{n+1} + X_{n-1}X_{n+2} + X_{n-2}X_{n+3} + \ldots \\ &= 2x\left[\frac{1}{2}X_n^2 + X_{n-1}X_{n+1} + X_{n-2}X_{n+2} + X_{n-3}X_{n+3} + \ldots\right] \end{aligned}$$

Auf folgende Art kann man auch die Entwickelung des reciproken Werthes von u erhalten. Es ist

$$\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{dz} = (x-z)\,u = (x-z)\left[X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots\right]$$

oder, wenn man die Multiplication ausführt

$$\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{dz} = xX_0 + (xX_1 - X_0)\,z + (xX_2 - X_1)\,z^2 + \ldots + (xX_n - X_{n-1})\,z^n + \ldots$$

und wenn man auf beiden Seiten nach z integrirt

$$-\frac{1}{u} + \text{Const} = xX_0 z + (xX_1 - X_0)\frac{z^2}{2} + \ldots + (xX_n - X_{n-1})\frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Da nun $u = 1$ ist für $z = 0$, so folgt für die verlangte Entwickelung

$$\sqrt{1-2xz+z^2} = 1 - xX_0 z + (X_0 - xX_1)\frac{z^2}{2} + \ldots + (X_{n-2} - xX_{n-1})\frac{z^n}{n} + \ldots$$

Soll aber die Reihe x nicht enthalten, so muss man von der Relation

$$xX_n = \frac{n}{2n+1}X_{n-1} + \frac{n+1}{2n+1}X_{n+1}$$

Gebrauch machen, vermittelst welcher man erhält

$$\sqrt{1-2xz+z^2} = 1 - X_1 z + \frac{X_0 - X_2}{3}z^2 + \frac{X_1 - X_3}{5}z^3 + \frac{X_2 - X_4}{7}z^4 + \ldots + \frac{X_{n-2} - X_n}{2n-1}z^n + \ldots$$

Ordnet man die Reihe nach den X, so nimmt diese Gleichung die folgende Form an

$$\sqrt{1-2xz+z^2} = 1 + \frac{z^2}{3} X_0 + \left(\frac{z^2}{5} - 1\right) z X_1 + \left(\frac{z^2}{7} - \frac{1}{3}\right) z^2 X_2 + \ldots + \left(\frac{z^2}{2n+3} - \frac{1}{2n-1}\right) z^2 X_n + \ldots$$

Wie leicht einzusehen, liesse sich die Anzahl derartiger Resultate beträchtlich vermehren.

5.

Die in Art. 3 abgeleitete Gleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2X_m}{dx^2} - 2x\frac{dX_m}{dx} + m(m+1)X_m = 0$$

führt, wenn man darin n für m setzt und dann die Gleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2} - 2x\frac{dX_n}{dx} + n(n+1)X_n = 0$$

mit der vorhergehenden durch Subtraction verbindet, zu einem bekannten sehr wichtigen Satze. Man findet nämlich

$$(1-x^2)\left[X_m\frac{d^2X_n}{dx^2} - X_n\frac{d^2X_m}{dx^2}\right] - 2x\left[X_m\frac{dX_n}{dx} - X_n\frac{dX_m}{dx}\right] + \left[n(n+1) - m(m+1)\right]X_mX_n = 0$$

und wenn man zwischen den Grenzen -1 und $+1$ integrirt, wobei sich die beiden ersten Glieder linker Hand, nämlich

$$\left[(1-x)^2\left(X_m\frac{dX_n}{dx} - X_n\frac{dX_m}{dx}\right)\right]_{-1}^{+1}$$

aufheben, so erfolgt

$$\left[n(n+1) - m(m+1)\right]\int_{-1}^{+1} X_mX_n\,dx = 0$$

Was zunächst den Coëfficienten in der Klammer betrifft, so gibt derselbe, gleich Null gesetzt, die Gleichung

$$m^2 + m = n^2 + n$$

welche, nach m aufgelöst, die beiden Wurzeln

$$m_1 = n \quad , \quad m_2 = -(n+1)$$

liefert. Für alle anderen Werthe verschwindet jener Coëfficient nicht, muss also das Integral Null sein, so dass, mit Ausschluss der Werthe m_1 und m_2 immer

$$\int_{-1}^{+1} X_mX_n\,dx = 0$$

und dieses ist, wie man sieht, ohne Ausnahme der Fall, wenn man für m nur positive von n verschiedene Werthe setzt. Auf diesem Satze beruht bekanntlich die Methode für die Entwickelung gegebener Functionen in Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten. Was nun aber die Integrale

$$\int_{-1}^{+1} X_{-(n+1)}X_n\,dx \quad , \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx$$

betrifft, so sind sie einander gleich, wenn man, wie in Art. 1 geschah, $X_{-(n+1)}$ und X_n als einander gleich erachtet. Man hat daher nur das letztere Integral, dessen Werth offenbar von Null verschieden ist, zu ermitteln. Für diese Werthbestimmung jedoch gibt es meines Wissens nur ein directes Verfahren, nämlich jenes von Legendre, und es scheint daher nicht ohne Interesse zu sein, noch eine zweite, kürzere Herleitung jenes Werthes zu kennen, welche von einem ganz verschiedenen Gesichtspunkte ausgeht. Multiplicirt man nämlich die in Art. 2 erhaltene Gleichung

$$x\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = nX_n$$

durchgehends mit X_n und integrirt hierauf zwischen den Grenzen -1 und $+1$, so geht sie dadurch über in

$$n\int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \int_{-1}^{+1} xX_n\, dX_n - \int_{-1}^{+1} X_n dX_{n-1}$$

Was zunächst das zweite Integral auf der rechten Seite der Gleichung betrifft, so ist dasselbe nach der in Art. 2 begründeten Gleichung

$$\frac{dX_{n-1}}{dx} = (2n-3)\,X_{n-2} + (2n-7)\,X_{n-4} + \ldots$$

offenbar gleich Null, und für das erste Integral findet man durch theilweises Integriren

$$\left[\frac{x}{2}X_n^2 - \frac{1}{2}\int X_n^2\, dx\right]_{-1}^{+1} = 1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} X_n^2\, dx$$

so dass man die Gleichung

$$n\int_{-1}^{+1} X_n^2\, dx = 1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} X_n^2\, dx$$

erhält, aus welcher

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

folgt.

Die Legendre'sche Bestimmung besteht dem Wesen nach darin, dass das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2xy+y^2)(1-2xz+z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{yz}} \log\frac{1+\sqrt{yz}}{1-\sqrt{yz}}$$

nur von dem Product yz, nicht aber von y und z einzeln abhängig ist, so dass, wenn man die beiden Seiten in Reihen entwickelt, die Gleichung entsteht

$$\int_{-1}^{+1} dx \left\{X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + \ldots\right\}\left\{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots\right\}$$
$$= 2\left\{1 + \frac{1}{3}(yz)^2 + \frac{1}{5}(yz)^4 + \ldots + \frac{1}{2n+1}(yz)^{2n} + \ldots\right\}$$

woraus sich gleichzeitig die Resultate ergeben, dass

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n\, dx = 0 \quad , \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

6.

Den bisherigen Ergebnissen füge ich einige Bemerkungen bei. Multiplicirt man die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_n z^n + \ldots$$

mit $X_n dx$ und integrirt zwischen den Grenzen -1 und $+1$, so wird man

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{2z^n}{2n+1}$$

erhalten, worin z jeden beliebigen, zwischen -1 und $+1$ liegenden Werth haben kann. Integrirt man hierauf nach z zwischen den Grenzen a und b und kehrt auf der ersten Seite der Gleichung die Integrationsfolge um, so erfolgt

$$\int_{-1}^{+1} X_n dx \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{2(b^{n+1}-a^{n+1})}{(n+1)(2n+1)}$$

oder, wenn man die Integration nach z ebenfalls ausführt

$$\int_{-1}^{+1} X_n \log \frac{b-x+\sqrt{b^2-2bx+1}}{a-x+\sqrt{a^2-2ax+1}}\, dx = \frac{2(b^{n+1}-a^{n+1})}{(n+1)(2n+1)}$$

Dies ist der einfachste Fall einer Reihe von Ergebnissen, welche sich aus der allgemeinen Formel:

$$\int_{-1}^{+1} X_n dx \int_a^b \frac{f(z)\, dz}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{2}{2n+1} \int_a^b z^n f(z)\, dz$$

finden lassen, wenn a und b als zwischen -1 und $+1$ liegend vorausgesetzt werden. — Ohne mich weiter mit derselben zu beschäftigen, will ich nur noch bemerken, dass die Annahmen $z = -1$ und $z = +1$ zu dem Resultate

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1-x}} = (-1)^n \int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1}$$

führen. Eben so leicht ergeben sich aus den in Art. 4 abgeleiteten Gleichungen die beiden Integrale

$$\int_{-1}^{+1} \left[X_{n-1}X_n + X_{n-2}X_{n+1} + X_{n-3}X_{n+2} + \ldots\right] x dx = \frac{2n}{4n^2-1}$$

$$\int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{2} X_n^2 + X_{n-1}X_{n+1} + X_{n-2}X_{n+2} + X_{n-3}X_{n+3} + \ldots\right] x dx = 0$$

Da indessen $X_{n-r}X_{n+r}$ eine gerade Function ist, so versteht sich die letztere Gleichung von selbst. —

Endlich kann man noch bemerken, dass aus einer, zuerst von Dirichlet in seiner Abhandlung „Sur les Séries dont le terme général...“ (Crelle, Journal, Bd. 17) gefundenen Formel, wenn $x = \cos\gamma$ gesetzt wird, die Gleichung

$$X_n = 1 - \frac{(n+1)n}{1^2} \sin^2\frac{\gamma}{2} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2.2^2} \sin^4\frac{\gamma}{2} - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1^2.2^2.3^2} \sin^6\frac{\gamma}{2} + \ldots$$

sich ergibt, welche mit $dx = -\sin\gamma\, d\gamma$ multiplicirt und in die oben erhaltene Formel

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1}$$

substituirt, zu der Gleichung führt

$$\frac{2\sqrt{2}}{2n+1} = \int_0^{\pi} \left\{1 - \frac{(n+1)n}{1^2} \sin^2\frac{\gamma}{2} + \frac{(n+2)(n+1)\,n\,(n-1)}{1^2\,.\,2^2} \sin^4\frac{\gamma}{2} - \ldots\right\} \sqrt{2}\,.\cos\frac{\gamma}{2}\, d\gamma$$

aus welcher durch Ausführung der Integration die merkwürdige Reihe

$$\frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)n}{1^2} + \frac{1}{5}\,\frac{(n+2)(n+1)\,n(n-1)}{1^2.\,2^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)\,n(n-1)(n-2)}{1^2.\,2^2\,.3^2} + \ldots$$

erhalten wird.

7.

Unter den bis jetzt gefundenen Formeln sind einige einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig. So lässt sich aus der in Art. 2 abgeleiteten Gleichung

$$x\frac{dX_n}{dx} = nX_n + (2n-3)\,X_{n-2} + (2n-7)\,X_{n-4} + (2n-11)\,X_{n-6} + \ldots$$

eine Entwickelung von $x^r \dfrac{dX_n}{dx}$ finden, wenn man von den ebendaselbst nachgewiesenen Gleichungen

$$x\frac{dX_n}{dx} = nX_n + \frac{dX_{n-1}}{dx}; \qquad xX_n = \frac{nX_{n-1} + (n+1)\,X_{n+1}}{2n+1}$$

wiederholt Gebrauch macht. So z. B. ergibt sich

$$x^2\frac{dX_n}{dx} = \frac{n^2+n}{2n+1}\,X_{n+1} + \frac{3n^2-n-1}{2n+1}\,X_{n-1} + (2n-5)\,X_{n-3} + (2n-9)\,X_{n-5} + \ldots$$

u. s. w. In gleicher Weise lässt sich $x^r X_n$ in linearer Weise durch die Functionen X darstellen. So findet man z. B.

$$x^2X_n = \frac{n\,(n-1)}{4n^2-1}\,X_{n-2} + \frac{(2n-1)(n+1)^2 + (2n+3)\,n^2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\,X_n + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}\,X_{n+2}$$

Auch für $\dfrac{d^rX_n}{dx^r}$ lässt sich dasselbe erreichen und zwar kann man auf folgende Art zu einer allgemeinen Formel hiefür gelangen. Differentiirt man nämlich die Formel für $\dfrac{dX_n}{dx}$, so findet man nach einigen einfachen Reductionen

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} = 1\,.(2n-1)\,(2n-3)\,X_{n-2} + 2\,(2n-3)\,(2n-7)\,X_{n-4} + 3\,(2n-5)\,(2n-11)\,X_{n-6} + \ldots$$

Differentiirt man auch diese Gleichung, so erhält man

$$\frac{d^3X_n}{dx^3} = 1\,.(2n-1)\,(2n-3)\,(2n-5)\;X_{n-3} + 3\,(2n-3)\,(2n-5)\,(2n-9)\;X_{n-5}$$
$$+\; 6\,.(2n-5)\,(2n-7)\,(2n-13)\,X_{n-7} + 10\,(2n-7)\,(2n-9)\,(2n-17)\,X_{n-9} + \ldots$$

und durch das ganz gleiche Verfahren

$$\frac{d^4X_n}{dx} =$$

$$1\,.(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)\;X_{n-4} + 4\;(2n-3)(2n-5)(2n-7)\;(2n-11)\,X_{n-6}$$
$$+\,10(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-15)\,X_{n-8} + 20\,(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-19)\,X_{n-10} + \ldots$$

Aus diesen vier Gleichungen lässt sich hinreichend deutlich der Fortgang der Zahlencoëfficienten und übrigen Factoren erkennen. Was die ersteren betrifft, so bilden sie für $\frac{d^r X_n}{dx^r}$ offenbar eine arithmetische Reihe, deren allgemeines Glied

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+r-2)}{1.2.3\ldots.(r-1)}$$

ist. Bezeichnet λ einen Summationsbuchstaben, wird $r > 0$ vorausgesetzt und ist l die grösste in $1 + \frac{n-r}{2}$ enthaltene ganze Zahl, so hat man

$$\frac{d^r X_n}{dx^r} =$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+r-2)}{1.2.3\ldots(r-1)}(2n-2\lambda+1)(2n-2\lambda-1)\ldots(2n-2\lambda-2r+5)(2n-4\lambda-2r+5)X_{n-r-2\lambda+2}$$

Für $r = 5$ erhält man hieraus

$$\begin{aligned}\frac{d^5 X_n}{dx} = &\ 1.(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)X_{n-5}\\ &+ 5(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-13)X_{n-7}\\ &+ 15(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-17)X_{n-9}\\ &+ 35(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-13)(2n-21)X_{n-11}\\ &+ \ldots\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

8.

Von der so eben entwickelten allgemeinen Formel lässt sich eine Anwendung machen. Bezeichnet nämlich $\varkappa$ einen zweiten Stellenzeiger und ist k die grösste in $1 + \frac{m-s}{2}$ enthaltene ganze Zahl, so hat man analog wie oben die Gleichung

$$\frac{d^s X_m}{dx^s} =$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} \frac{\varkappa(\varkappa+1)(\varkappa+2)\ldots(\varkappa+s-2)}{1.2.3\ldots(s-1)}(2m-2\varkappa+1)(2m-2\varkappa-1)\ldots(2m-2\varkappa-2s+5)(2m-4\varkappa-2s+5)X_{m-s-2\varkappa+2}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit jener für $\frac{d^r X_n}{dx^r}$ und integrirt hierauf zwischen den Grenzen -1 und $+1$, so wird nach dem Satze, dass, zwischen jenen Grenzen genommen, das Integral des Products zweier Kugelfunctionen nur im Falle gleicher Indices einen von Null verschiedenen Werth erhält, die rechte Seite der Gleichung immer verschwinden, wenn

$$n - r - 2\lambda + 2 = m - s - 2\varkappa + 2$$

oder also

$$\lambda - \varkappa = \frac{n-m}{2} + \frac{s-r}{2}$$

gesetzt, keine ganze Zahl für $\lambda - \varkappa$ gibt; denn erhält man hiefür keine ganze Zahl, so enthält das Product sicher keine Glieder mit Kugelfunctionen von gleichen Indices.

Hieraus ergibt sich der Satz:

Wenn die Ordnungszahlen r und s der Differentiationen von Null verschieden, gleichartig (entweder gerade oder ungerade) dagegen die Indices m und n der Kugelfunctionen ungleichartig (eine gerade, die andere ungerade) sind; oder wenn r und s ungleichartig, dagegen m und n gleichartig sind, überhaupt also, wenn der Ausdruck

$$\frac{n-m}{2}+\frac{s-r}{2}$$

keine ganze Zahl gibt, so ist immer

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d^r X_n}{dx^r}\cdot\frac{d^s X_m}{dx^s}\,dx = 0$$

Um den besondern Fall, in welchem $s = 0$ ist, etwas näher zu betrachten, will ich zunächst voraussetzen, es sei

$$m > n - r$$

so ist immer noch

$$\int_{-1}^{+1} X_m \frac{d^r X_n}{dx^r}\,dx = 0$$

Setzt man aber voraus, es sei

$$m < n - r$$

und es seien m und $n-r$ gleichartig; wird ferner

$$n - m - r = 2\rho$$

und ρ als eine ganze Zahl vorausgesetzt, so ist

$$\int_{-1}^{+1} X_m \frac{d^r X_n}{dx^r}\,dx = 2\,\frac{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)\ldots(\rho+r-1)}{1.2.3\ldots(r-1)}\,(2n-2\rho-1)(2n-2\rho-3)\ldots(2n-2\rho-2r+3)$$

Hieraus findet man für $r = 1$ und wenn $\rho = \dfrac{n-m-1}{2}$ eine ganze Zahl ist

$$\int_{-1}^{+1} X_m \frac{dX_n}{dx}\,dx = 2$$

was, wie bekannt, richtig ist.

Nimmt man endlich an, es sei

$$m < n - r$$

es seien aber m und $n-r$ ungleichartig, und

$$n - m - r = 2\rho + 1$$

gesetzt, gebe für ρ eine ganze Zahl, so ist immer

$$\int_{-1}^{+1} X_m \frac{d^r X_n}{dx^r}\,dx = 0$$

Hieraus findet man für $r = 1$ und wenn $\rho = \dfrac{n-m-2}{2}$ eine ganze Zahl ist

$$\int_{-1}^{+1} X_m \frac{dX_n}{dx}\,dx = 0$$

was, wie bekannt, ebenfalls richtig ist. —

Als Ergänzung des betrachteten allgemeinsten Falles nehme man noch an, es sei

$$\lambda - \varkappa = \frac{n-m}{2} + \frac{s-r}{2}$$

in der That eine ganze Zahl. Dann wird der Werth des Integrals

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^r X_n}{dx^r} \cdot \frac{d^s X_m}{dx^s} \, dx$$

erhalten, wenn man die allgemeinen Glieder der für $\frac{d^r X_n}{dx^r}$ und $\frac{d^s X_m}{dx^s}$ aufgestellten Summenausdrücke mit einander und ihr Product mit $\frac{2}{2n-2r-4\lambda+5}$ multiplicirt und für λ, $\varkappa$ alle diejenigen Zahlen setzt, welche für $\lambda - \varkappa$ den oben bestimmten Werth geben und so beschaffen sind, dass λ zwischen 1 und l und $\varkappa$ zwischen 1 und k liegt.

Diese Sätze, welche mancher Anwendungen fähig sind, haben eine gewisse Analogie zu jenen, welche Legendre a. a. O. in den Exerc. gefunden hat, und durch welche der Werth des Integrals

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^r X_m}{dx^r} \cdot \frac{d^r X_n}{dx^r} (1-x^2)^r \, dx$$

erhalten wird; es ist aber klar, dass dieses Integral in seiner Art weniger allgemein als das so eben erörterte ist.

9.

Wie im Eingange bemerkt, betrifft der zweite hier zu erörternde Gegenstand die Begründung einiger Verfahrungsarten, durch welche in gewissen Fällen die Entwickelung gegebener Functionen in Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten, wesentlich leichter wird als nach der gewöhnlichen Methode.

Es ist bekannt, dass die Entwickelung

$$f(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_n X_n + \ldots .$$

einer Function $f(x)$ nach Kugelfunctionen, erhalten wird, wenn man die Coëfficienten A_n durch die Gleichung

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f_{(x)} \, X_n \, dx$$

bestimmt. Der Anwendung dieser Vorschrift stellen sich, wie dies ebenfalls bekannt ist, in gegebenen Fällen nicht selten Schwierigkeiten entgegen, welche darin bestehen, dass der Coëfficient A_n wegen des unter dem Integralzeichen vorkommenden Factors X_n in unübersichtlicher Form erscheint, welche selbst in den einfachsten Fällen die Reductionen nicht erkennen lässt, welche daran angebracht werden könnten, oder dass, wenn sich A_n überhaupt nicht in geschlossener Form finden lässt, das bezeichnete Verfahren keinen Anhaltspunkt darbietet, wie man wenigstens zu einer recurrirenden Beziehung zwischen zwei oder mehreren auf einander folgenden Coëfficienten gelangen könne. Bevor ich mit der Auseinandersetzung

einiger anderen Methoden für die Bestimmung der Coëfficienten mich beschäftige, scheint es zweckmässig, anzugeben, was unter A_n verstanden werden soll, wenn n negativ ist. Die im Folgenden vorkommenden Fälle, in welchen negative Indices von A_n eintreten, sind so beschaffen, dass für sie eine Definition hinreicht. Der Analogie nach scheint es am angemessensten, eben so $A_{-n} = A_{n-1}$ zu setzen, wie früher $X_{-n} = X_{n-1}$ gesetzt worden ist, so dass hiernach gleichzeitig

$$A_{-n} = A_{n-1} \quad \text{und} \quad A_{+n} = A_{-(n+1)}$$

ist. Es versteht sich, dass an dieser Erklärung durchgehends festgehalten werden muss. Der Nutzen derselben besteht in der nicht unbeträchtlichen Vereinfachung mancher Formeln, insbesondere derjenigen, in welchen Summenausdrücke vorkommen.

10.

Ein Verfahren zur Bestimmung der Coëfficienten A_n, welches sehr nahe liegt, aber noch nicht benutzt worden zu sein scheint, ergibt sich aus der Bemerkung, dass jener Coëfficient erhalten wird, wenn man das Integral

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

nachdem es ermittelt ist, aufsteigend nach Potenzen von z entwickelt und den Coëfficienten von z^n daraus nimmt. Da in der Regel der Nenner $\sqrt{1-2xz+z^2}$ viel einfacher, jedenfalls übersichtlicher als X_n ist, so wird das Verfahren im Vergleich zum oben bezeichneten, manchmal den Vorzug verdienen. Das Integral lässt übrigens noch eine Umformung zu. Setzt man nämlich

$$1-2xz+z^2 = t^2, \quad x = \frac{1+z^2-t^2}{2z}, \quad dx = -\frac{t\,dt}{z}$$

so nimmt das Integral die Form an

$$\frac{2n+1}{2z}\int_{1-z}^{1+z} dt \, . \, f\left(\frac{1+z^2-t^2}{2z}\right)$$

Um eines besondern Falles zu erwähnen, nehme man an, es handle sich um die Entwickelung der Function

$$f(u) = \frac{1}{a+u}$$

dann entsteht der Ausdruck

$$(2n+1)\int_{1-z}^{1+z}\frac{dt}{1+2az+z^2-t^2}$$

für welchen man nach näherer Ausführung erhält

$$\frac{2n+1}{2\sqrt{1+2az+z^2}}\log\frac{a+z+\sqrt{1+2az+z^2}}{a+z-\sqrt{1+2az+z^2}}$$

oder in etwas anderer Form

$$\frac{2n+1}{\sqrt{1+2az+z^2}}\left\{\log\left(a+z+\sqrt{1+2az+z^2}\right)-\frac{1}{2}\log\left(a^2-1\right)\right\}$$

Was nun die Entwickelung des einen oder andern dieser Ausdrücke betrifft, so kann sie, dem speciellen Falle angepasst, sehr einfach in der folgenden Weise geschehen. Aus der Definitionsgleichung der Functionen X ergibt sich

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = X_0 z + X_1 \frac{z^2}{2} + X_2 \frac{z^3}{3} + X_3 \frac{z^4}{4} + \dots$$

oder also, wenn man die Integration ausführt

$$\log(z-x+\sqrt{1-2zx+z^2}) = \log(1-x) + X_0 z + X_1 \frac{z^2}{2} + X_2 \frac{z^3}{3} + \dots + X_n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Setzt man hierin $x = -a$ und bezeichnet mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots$ dieselben Functionen von a, welche $X_0, X_1, X_2, \dots X_n \dots$ von x sind, so findet man

$$\log(a+z+\sqrt{1+2az+z^2}) = \log(1+a) + \alpha_0 z - \alpha_1 \frac{z^2}{2} + \alpha_2 \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^n \alpha_n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Daraus folgt nun die Gleichung

$$\frac{2n+1}{2\sqrt{1+2az+z^2}} \log \frac{z+a+\sqrt{1+2az+z^2}}{z+a-\sqrt{1+2az+z^2}} =$$

$$\frac{2n+1}{\sqrt{1+2az+z^2}} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{a+1}{a-1} + \alpha_0 z - \alpha_1 \frac{z^2}{2} + \alpha_2 \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^n \alpha_n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots \right\}$$

Dem letzteren Ausdruck aber kann man auch noch die Form geben

$$\frac{2n+1}{2} \log \frac{a+1}{a-1} \cdot \left\{ \alpha_0 - \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 - \dots + (-1)^n \alpha_n z^n + \dots \right\}$$

$$+ (2n+1) \left\{ \alpha_0 - \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 - \dots + (-1)^n \alpha_n z^n + \dots \right\} \left\{ \alpha_0 z - \alpha_1 \frac{z^2}{2} + \dots + (-1)^n \alpha_n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots \right\}$$

Daraus suche man den Coëfficienten von z^n, so erhält man

$$A_n = (-1)^n (2n+1)\, \alpha_n \cdot \log \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$$

$$+ (-1)^{n-1} (2n+1) \left\{ \frac{\alpha_0 \alpha_{n-1}}{n} + \frac{\alpha_1 \alpha_{n-2}}{n-1} + \frac{\alpha_2 \alpha_{n-3}}{n-2} + \dots + \frac{\alpha_{n-2} \alpha_1}{2} + \frac{\alpha_{n-1} \alpha_0}{1} \right\}$$

Wenn man unterscheidet, ob n gerade oder ungerade ist, so lässt sich der Ausdruck in der Klammer auf die Hälfte der Glieder zurückführen, und man kann dann das Resultat dieser Rechnung in folgendem Satze zusammenfassen:

Wenn

$$\frac{1}{a+x} = A_0 X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_{2n} X_{2n} + A_{2n+1} X_{2n+1} + \dots$$

gesetzt wird, und wenn $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ dieselben Functionen von a wie $X_0, X_1, X_2, \dots$ solche von x sind, so sind die Coëfficienten A bestimmt durch die Gleichungen

$$A_{2n} = (4n+1) \times$$

$$\left\{ \alpha_{2n} \log \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} + (2n+1) \left[\frac{\alpha_0 \alpha_{2n-1}}{1.2n} + \frac{\alpha_1 \alpha_{2n-2}}{2(2n-1)} + \frac{\alpha_2 \alpha_{2n-3}}{3(2n-2)} + \dots + \frac{\alpha_{n-1} \alpha_n}{n(n+1)} \right] \right\}$$

$$A_{2n+1} = (4n+3) \times$$

$$\left\{ \alpha_{2n+1} \log \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} + (2n+2) \left[\frac{\alpha_0 \alpha_{2n}}{1.(2n+1)} + \frac{\alpha_1 \alpha_{2n-1}}{2.2n} + \frac{\alpha_2 \alpha_{2n-2}}{3(2n-1)} + \dots + \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n+1}}{n(n+2)} + \frac{\alpha_n \alpha_n}{(n+1)(2n+2)} \right] \right\}$$

durch welche die explicite Bestimmung der Coëfficienten gegeben ist.

Durch das gleiche Verfahren gelangt man auch zur Entwickelung

$$\log(a+x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots.$$

wobei die Coëfficienten aus der aufsteigenden Entwickelung des Integrals

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\log(a+x)}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\,dx$$

oder, um die Rechnung zu erleichtern, des nach a genommenen Differentialquotienten desselben zu finden sind. — Ebenso hat man für die Entwickelung

$$(a+x)^r = A_0 X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots.$$

den Ausdruck

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{(a+x)^r\,dx}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{2n+1}{(2z)^{r+1}}\int_{1-z}^{1+z} dt\,(1+2az+z^2-t^2)^r$$

und für die Reihe

$$\operatorname{arctg} ax = A_0 X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots$$

das Integral

$$\frac{2n+1}{2}\int_{1-z}^{1+z} dt\,\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2az+z^2-t^2}{2z}\right)$$

u. s. w. zu betrachten.

11.

Zur Bestimmung der Coëfficienten A ist in letzter Zeit ein in vielen Fällen zweckmässiges Verfahren (s. die Abhandlung von G. Bauer im Journal von Crelle, Band 56) eingeschlagen worden, welches darin besteht, dass man die Gleichungen zu Hilfe nimmt, die sich ergeben, wenn man die Entwickelung

$$f(x) = \sum_0^\infty A_n X_n$$

einer Integration nach x unterwirft; man erhält dadurch in vielen Fällen eine weitere Gleichung, welche wenigstens eine Relation zwischen den zu bestimmenden Coëfficienten liefert. Dieses bis dahin nur auf einzelne Beispiele und insbesondere nur auf die aus der einmaligen Integration hervorgehende Gleichung angewendete Verfahren lässt eine Erweiterung zu, welche hier in Kürze näher bezeichnet werden mag.

Man multiplicire die angeführte Gleichung mit dx und integrire sie dann zwischen den Grenzen x und $+1$, so erfolgt

$$\int_x^1 f(x)\,dx = \sum_0^\infty A_n \int_x^1 X_n\,dx$$

und wenn man dasselbe Verfahren noch $r-1$ mal wiederholt

$$\int_x^1 dx\int_x^1 dx \ldots \int_x^1 dx \int_x^1 f(x)\,dx = \sum_0^\infty A_n \int_x^1 dx \int_x^1 dx \ldots \int_x^1 dx \int_x^1 X_n\,dx$$

Nun lässt sich, wie bekannt, sowohl die rechte als die linke Seite dieser Gleichung durch einfache Integrale ausdrücken; führt man zunächst rechter Hand diese Reduction aus, so findet man

$$\frac{(-1)^r}{1.2.3..r}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left\{x^r \int_x^1 X_n dx - rx^{r-1}\int_x^1 xX_n dx + \frac{r(r-1)}{1.2}x^{r-1}\int_x^1 x^2 X_n dx - \ldots \mp \int_x^1 x^r X_n dx\right\}$$

Bezeichnet man mit Y_n dieselbe Function von y, wie X_n eine solche von x ist, so kann man die $r+1$ Integrale unter ein gemeinschaftliches, auf die neue Veränderliche y sich beziehendes Integralzeichen bringen, wodurch man den Ausdruck

$$\int_x^1 dy \left\{x^r - rx^{r-1}y + \frac{r(r-1)}{1.2}x^{r-2}y^2 - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}x^{r-3}y^3 + \ldots \pm rxy^{r-1} \mp y^r\right\} Y_n$$

oder einfacher

$$\int_x^1 Y_n \, . \, (x-y)^r \, dy$$

erhält, so dass die oben gefundene Gleichung die Form annimmt

$$\int_x^1 dx \int_x^1 dx \ldots \int_x^1 f(x)\, dx = \frac{(-1)^r}{1.2.3\ldots r}\sum_0^\infty \left[A_n \int_x^1 Y_n \, . \, (x-y)^r \, dy\right]$$

Würde es sich um eine Verificirung dieses Resultats handeln, so hätte man sich nur zu erinnern, dass die linke Seite der Gleichung ebenfalls in die Form

$$\frac{(-1)^r}{1.2.3..r}\int_x^1 f(y)\,(x-y)^r\, dy$$

gebracht werden kann und also

$$\int_x^1 f(y)\,(x-y)^r\, dy = \sum_0^\infty \left[A_n \int_x^1 Y_n\,(x-y)^r dy\right]$$

ist; diese letztere Gleichung ergibt sich in der That, wenn man die ursprüngliche mit $(x-y)^r$ multiplicirt und dann zwischen den Grenzen x und 1 nach y integrirt.

Was nun aber die Benützung der aus wiederholter Integration hervorgehenden Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten A betrifft, so dient hierzu nicht sowohl die so eben ausgeführte Umgestaltung des Ausdrucks

$$\sum_0^\infty A_n \int_x^1 dx \int_x^1 dx \ldots \int_x^1 X_n\, dx$$

als vielmehr die folgende, welche sich auf die Eigenschaften der Function X_n gründet. Aus einer im Art. 2 entwickelten Formel ergibt sich nämlich

$$\int_x^1 X_n\, dx = \frac{X_{n-1} - X_{n+1}}{2n+1}$$

so dass also neben der Gleichung

$$f(x) = \sum_0^\infty A_n X_n$$

auch noch die folgende

$$\int_x^1 f(x)\, dx = \sum_0^\infty \frac{A_n}{2n+1} (X_{n-1} - X_{n+1})$$

besteht. Man kann den letztern Summenausdruck so transformiren, dass blos X_n statt A_n mit demselben Index hinter dem Summenzeichen vorkommt; man muss aber dabei an der Bedeutung festhalten, welche den Grössen X_n und A_n für negative Werthe von n beigelegt worden ist. Zerlegt man nämlich jene Summen in zwei Theile, so ist

$$\sum_0^\infty \frac{A_n}{2n+1} X_{n-1} - \sum_0^\infty \frac{A_n}{2n+1} X_{n+1} = \sum_{-1}^\infty \frac{A_{n+1}}{2n+3} X_n - \sum_1^\infty \frac{A_{n-1}}{2n-1} X_n$$

Die letztere Form aber lässt sich in

$$A_0 X_{-1} - A_{-1} X_0 + \sum_0^\infty \left(\frac{A_{n+1}}{2n+3} - \frac{A_{n-1}}{2n-1}\right) X_n$$

zerlegen, worin sich die Ausdrücke vor dem Summenzeichen gegenseitig aufheben, so dass man die Gleichung erhält

$$\int_x^1 f(x)\, dx = \sum_0^\infty \left(\frac{A_{n+1}}{2n+3} - \frac{A_{n-1}}{2n-1}\right) X_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Diese Gleichung, in anderer Form dargestellt, bildet die Grundlage für die Methode der Coëfficientenbestimmung, welche in der oben bezeichneten Abhandlung zuerst benutzt worden ist. Unterwirft man diese Gleichung einer abermaligen Integration, so ergibt sich in gleicher Weise wie oben

$$\int_x^1 dx \int_x^1 f(x)\, dx = \sum_0^\infty \left(\frac{A_{n+1}}{2n+3} - \frac{A_{n-1}}{2n-1}\right) \frac{X_{n-1} - X_{n+1}}{2n+1}$$

Um auch hierbei den Ausdruck hinter dem Summenzeichen blos durch X_n auszudrücken, zerlege man denselben in zwei Theile und transformire jeden, so wird

$$\sum_0^\infty \left(\frac{A_{n+1}}{2n+3} - \frac{A_{n-1}}{2n-1}\right) \frac{X_{n-1}}{2n+1} = \sum_{-1}^\infty \left(\frac{A_{n+2}}{2n+5} - \frac{A_n}{2n+1}\right) \frac{X_n}{2n+3}$$

$$\sum_0^\infty \left(\frac{A_{n+1}}{2n+3} - \frac{A_{n-1}}{2n-1}\right) \frac{X_{n+1}}{2n+1} = \sum_{+1}^\infty \left(\frac{A_n}{2n+1} - \frac{A_{n-2}}{2n-3}\right) \frac{X_n}{2n-1}$$

Lässt man ferner die beiden Summen rechter Hand mit 0 statt mit -1 und $+1$ anfangen, so werden die Ausdrücke

$$\left(\frac{1}{3} A_1 + A_{-1}\right) X_{-1} - \left(A_0 + \frac{1}{3} A_{-2}\right) X_0$$

ausgeschieden und heben sich offenbar auf, so dass man erhält

$$\int_x^1 dx \int_x^1 f(x)\, dx = \int_x^1 (y-x) f(y)\, dy =$$

$$\sum_0^\infty \left[\frac{A_{n+2}}{(2n+5)(2n+3)} - \frac{2A_n}{(2n+3)(2n-1)} + \frac{A_{n-2}}{(2n-1)(2n-3)}\right] X_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \; (2)$$

Wie man in dieser Weise weiter gehen kann, bedarf keiner Auseinandersetzung.

12.

In manchen Fällen lassen sich die Quadraturen nicht in endlicher Form ausführen, welche in den so eben entwickelten Gleichungen vorkommen, während dies gleichwohl bei einem der Integrale

$$\int_x^1 f(y)\, dy, \int_x^1 y f(y)\, dy, \int_x^1 y^2 f(y)\, dy, \ldots$$

der Fall sein kann. Da sich nun, wie leicht einzusehen ist, diese Integrale ebenfalls mittelst der Coëfficienten A wie $f(x)$ selbst nach Kugelfunctionen entwickeln lassen, so liegt hierin öfter ein Mittel zur Coëfficientenbestimmung. Multiplicirt man die Gleichung (1) des vorigen Art. mit x und addirt sie dann zu (2), so ergibt sich

$$\int_x^1 y f(y)\, dy = \sum_0^\infty \left[\frac{A_{n+2}}{(2n+5)(2n+3)} - \frac{2A_n}{(2n+3)(2n-1)} + \frac{A_{n-2}}{(2n-1)(2n-3)}\right] X_n$$

$$+ \sum_0^\infty \left[\frac{A_{n+1}}{2n+3} - \frac{A_{n-1}}{2n-1}\right] x X_n$$

Da nun

$$x X_n = \frac{n}{2n+1} X_{n-1} + \frac{n+1}{2n+1} X_{n+1}$$

so kann man den letztern Summenausdruck in zwei Theile zerlegen und jeden derselben einzeln transformiren, wodurch man findet

$$\sum_0^\infty \frac{n}{2n+1} \left(\frac{A_{n+1}}{2n+3} - \frac{A_{n-1}}{2n-1}\right) X_{n-1} = \sum_0^\infty \frac{n+1}{2n+3} \left(\frac{A_{n+2}}{2n+5} - \frac{A_n}{2n+1}\right) X_n$$

$$\sum_0^\infty \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{A_{n+1}}{2n+3} - \frac{A_{n-1}}{2n-1}\right) X_{n+1} = \sum_0^\infty \frac{n}{2n-1} \left(\frac{A_n}{2n+1} - \frac{A_{n-2}}{2n-3}\right) X_n$$

so dass sich die Gleichung ergibt

$$\int_x^1 y f(y)\, dy = \sum_0^\infty \left[\frac{(n+2) A_{n+2}}{(2n+5)(2n+3)} - \frac{A_n}{(2n+3)(2n-1)} - \frac{(n-1) A_{n-2}}{(2n-1)(2n-3)}\right] X_n \quad . \quad . \; (1)$$

Auf ganz gleiche Weise kann man auch die Integrale

$$\int_x^1 y^2 f(y)\, dy \ldots$$

ausdrücken.

13.

Die Betrachtung einiger besonderen Fälle wird genügen, den Gebrauch der so eben abgeleiteten Formeln zu zeigen. Angenommen, es handle sich darum, die Function $\cos ax$ nach Kugelfunctionen zu entwickeln, so bestimme man zunächst

$$\int_x^1 dx \int_x^1 \cos ax \, . \, dx = (1-x)\,\frac{\sin a}{a} + \frac{\cos a - \cos x}{a^2}$$

und es ist daher nach der Gleichung (2) des Art. 11

$$(1-x)\,\frac{\sin a}{a} + \frac{\cos a - \cos ax}{a^2} = \sum_0^\infty \left[\frac{A_{n+2}}{(2n+5)(2n+3)} - \frac{2A_n}{(2n+3)(2n-1)} + \frac{A_{n-2}}{(2n-1)(2n-3)}\right] X_n$$

Da nun $\cos ax = \sum\limits_0^\infty A_n X_n$ und $x = X_1$, so erkennt man auf der Stelle, dass diese Gleichung nur bestehen kann, wenn

$$\frac{\sin a}{a} + \frac{\cos a}{a^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2}{3}\right) A_0 + \frac{1}{3} A_1 + \frac{1}{15} A_2$$

$$\frac{\sin a}{a} = A_0 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{5}\right) A_1 - \frac{1}{35} A_3$$

und für alle Werthe von n, welche die Einheit übertreffen

$$\frac{A_{n-2}}{(2n-1)(2n-3)} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{(2n+3)(2n-1)}\right) A_n + \frac{A_{n+2}}{(2n+5)(2n+3)} = 0$$

Es ist für sich klar, dass die vorliegende Entwickelung nur Glieder gerader Ordnung enthalten kann, dass also $A_{2n+1} = 0$ sein muss; da ausserdem

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \cos ax \, dx = \frac{\sin a}{a}$$

so folgt

$$A_2 = 15\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{a^2}\right)\frac{\sin a}{a} + 15\,\frac{\cos a}{a^2}$$

u. s. w.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich auch eine Relation für die Coëfficienten der Entwickelung von $\sin ax$ ableiten.

Als zweites Beispiel will ich die Function $e^{-a^2y^2}$ betrachten. Hier tritt die Gleichung (1) des vorigen Art. in Anwendung und man hat

$$\int_x^1 y\, e^{-a^2y^2}\, dy = \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-a^2}}{2a^2}$$

Da nun

$$e^{-a^2x^2} = \sum_0^\infty A_n X_n$$

so ergibt sich aus jener Gleichung unmittelbar die Bedingung

$$\sum_0^\infty A_n X_n - e^{-a^2} = 2a^2 \sum_0^\infty \left[\frac{(n+2)\,A_{n+2}}{(2n+5)(2n+3)} - \frac{A_n}{(2n+3)(2n-1)} - \frac{(n-1)\,A_{n-2}}{(2n-1)(2n-3)}\right] X_n$$

aus welcher folgt

$$A_0 - e^{-a^2} = 2a^2 \left\{\frac{2}{15} A_2 + \frac{1}{3} A_0 + \frac{1}{3} A_1\right\}$$

und für alle die Null übertreffenden Werthe von n

$$\frac{(n+2)\, A_{n+2}}{(2n+5)\,(2n+3)} - \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{(2n+3)\,(2n-1)}\right) A_n - \frac{(n-1)\, A_{n-2}}{(2n-1)\,(2n-3)} = 0$$

Nun ist

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^{-a^2x^2}\, dx = 1 - \frac{1}{3}\, a^2 + \frac{1}{5}\,\frac{a^4}{1.2} - \frac{1}{7}\,\frac{a^6}{1.2.3} + \ldots$$

und da

$$A_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} e^{-a^2x^2}\, x\, dx = 0,$$

so wie überhaupt $A_{2n+1} = 0$ ist, so folgt

$$A_2 = \frac{15}{4a^2}\left\{\left(1 - \frac{2}{3}\, a^2\right) A_0 - e^{-a^2}\right\}$$

Es können also alle Coëfficienten durch die einzige Reihe, welche A_0 darstellt, ausgedrückt werden.

Nimmt man drittens an, es werde $\frac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}$ für $f\,(x)$ gesetzt, so folgt

$$\int_x^1 \frac{y\, dy}{\sqrt{1+a^2y^2}} = \frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+a^2x^2}}{a^2}$$

Da aber

$$\sqrt{1 + a^2x^2} = (1 + a^2x^2) \sum_0^\infty A_n X_n$$

$$= \sum_0^\infty \left(A_n X_n + a^2 A_n \,.\, x^2 X_n\right)$$

so braucht man nur für $x^2\, X_n$ den im Art. 7 hierfür abgeleiteten Ausdruck zu setzen und den Summenausdruck, wie dies bereits wiederholt geschah, so zu transformiren, dass hinter dem Summenzeichen nur X_n vorkommt, um zur Gleichung

$$\sqrt{1 + a^2x^2} =$$

$$\sum_0^\infty \left[A_n + a^2\left(\frac{n\,(n-1)\, A_{n-2}}{(2n-1)\,(2n-3)} + \frac{n^2\,(2n+3) + (n+1)^2\,(2n-1)}{(2n-1)\,(2n+1)\,(2n+3)}\, A_n + \frac{(n+1)\,(n+2)}{(2n+3)\,(2n+5)}\, A_{n+2}\right)\right] X_n$$

zu gelangen. Gleichzeitig aber folgt aus der Gleichung (1) des Art. 12 für den vorliegenden Fall

$$\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{1 + a^2x^2} =$$

$$a^2 \sum_0^\infty \left[\frac{(n+2)\, A_{n+2}}{(2n+5)\,(2n+3)} - \frac{A_n}{(2n+3)\,(2n-1)} - \frac{(n-1)\, A_{n-2}}{(2n-1)\,(2n-3)}\right] X_n$$

Addirt man also diese Gleichungen, so ist es leicht die nothwendigen Bedingungen anzugeben, welchen die Coëfficienten A genügen müssen. Insbesondere erhält man für $n = 0$

$$A_2 = \frac{15}{4a^2}\left\{\sqrt{1 + a^2} - \left(1 + \frac{2}{3}\, a^2\right) A_0\right\}$$

u. s. w.

Alle A mit ungeradem Index sind Null.

14.

Der dritte Theil der vorliegenden Erörterungen betrifft, wie in der Einleitung bemerkt wurde, die Nachweisung einiger Eigenschaften, welche die Coëfficienten der nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen, oder also die bisher mit A_n bezeichneten Grössen besitzen, wenn dieselben als Functionen einer Grösse a betrachtet werden. Unter diese Eigenschaften könnte man zunächst rechnen, dass sich die Werthe mancher bestimmten Integrale von Functionen, welche mit der Reihe in Beziehung stehen, durch deren Entwicklungscoëfficienten ausdrücken lassen. Ich beschränke mich hier darauf, ein einziges Beispiel dieser Art anzuführen, welches sich in den Formeln des Art. 11 von selbst darbietet. Hat man nämlich auf irgend eine Weise die Coëfficienten der Reihe

$$f(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n + \ldots$$

gefunden, so ist, wenn r eine positive ganze Zahl bezeichnet

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (1+x)^r f(x)\, dx =$$

$$\left\{1 + \frac{1}{3}\,\frac{r(r-1)}{1.2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\ldots\right\} A_0$$

$$+\left\{\frac{1}{3}\, r + \frac{1}{5}\,\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} + \frac{1}{7}\,\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{1.2.3.4.5} + \ldots\right\} A_1$$

$$+\left\{\frac{2}{3.5}\cdot\frac{r(r-1)}{1.2} + \frac{4}{5.7}\cdot\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4} + \frac{6}{7.9}\,\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right\} A_2$$

$$+\left\{\frac{2}{5.7}\,\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} + \frac{4}{7.9}\,\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{1.2.3.4.5} + \frac{6}{9.11}\cdot\frac{r(r-1)\ldots(r-6)}{1.2\ldots7} + \ldots\ldots\right\} A_3$$

$$+\left\{\frac{2.4}{5.7.9}\,\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4} + \frac{4.6}{7.9.11}\cdot\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right\} A_4$$

$$+\left\{\frac{2.4}{7.9.11}\cdot\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{1.2.3.4.5} + \frac{4.6}{9.11.13}\,\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots\right\} A_5$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Das Gesetz der Coëfficienten dieser Reihe, welche, wenn r eine positive ganze Zahl ist, von selbst abbricht, lässt sich deutlich erkennen.

Von grösserm Interesse als diese Benützung der Coëfficienten A sind jedoch die Relationen, welche zwischen diesen selbst stattfinden. Einige hierher gehörige Bemerkungen mögen vorangehen. — Wenn in der Gleichung

$$f(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_n X_n + \ldots$$

einmal $x = -1$ und dann $x = +1$ gesetzt wird, so erhält man nach Art. 1 zwei Gleichungen, aus welchen folgt

$$A_0 + A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n} + \ldots = \frac{f(+1) + f(-1)}{2}$$

$$A_1 + A_3 + A_5 + \ldots + A_{2n+1} + \ldots = \frac{f(+1) - f(-1)}{2}$$

Setzt man dagegen $x = 0$, so ergibt sich

$$A_0 - \frac{1}{2} A_2 + \frac{1.3}{2.4} A_4 - \frac{1.3.5}{2.4.6} A_6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} A_8 - \ldots = f(0)$$

Multiplicirt man die Gleichung für $f(x)$ mit $\frac{dX_{2n}}{dx}$, integrirt sie dann zwischen den Grenzen -1 und $+1$ und beachtet den in Art. 8 gefundenen Satz, so erfolgt:

$$A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + \ldots + A_{2n-1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{dX_{2n}}{dx} dx$$

Multiplicirt man dagegen mit $\frac{dX_{2n+1}}{dx}$, so ergibt sich in ähnlicher Weise

$$A_0 + A_2 + A_4 + A_6 + \ldots + A_{2n} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{dX_{2n+1}}{dx} dx$$

Man kann hieraus die Summe der $2n$ ersten Glieder finden und zwar ergibt sich

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{2n-1} + A_{2n} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{d\,[X_{2n} + X_{2n+1}]}{dx} dx$$

Lässt man n ohne Ende wachsen, so geht diese Gleichung über in

$$\lim . \int_{-1}^{+1} f(x) . \frac{d\,[X_{2n+1} + X_{2n}]}{dx} dx = 2f(+1)$$

Da ausserdem

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + A_{2n} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) . \frac{d\,[X_{2n+1} - X_{2n}]}{dx} dx$$

so gelangt man für $n = \infty$ zu der weitern Gleichung

$$\lim . \int_{-1}^{+1} f(x) . \frac{d\,[X_{2n+1} - X_{2n}]}{dx} dx = 2f(-1)$$

und wie leicht zu sehen folgt aus diesen beiden Resultaten, dass

$$\lim . \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{dX_n}{dx} dx = f(+1) - f(-1)$$

$$\lim . \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{dX_{2n+1}}{dx} dx = f(+1) + f(-1)$$

Ich füge noch bei, dass, wenn man die Gleichung

$$\frac{df(x)}{dx} = A_0 \frac{dX_0}{dx} + A_1 \frac{dX_1}{dx} + A_2 \frac{dX_2}{dx} + \ldots + A_m \frac{dX_m}{dx} + \ldots$$

einmal mit X_{2n-1} und dann mit X_{2n} multiplicirt und hierauf zwischen den bisherigen Grenzen integrirt, die beiden weiteren Gleichungen

$$A_{2n} \quad + A_{2n+2} + A_{2n+4} + A_{2n+6} + \ldots = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} X_{2n-1} \frac{df(x)}{dx}\, dx$$

$$A_{2n+1} + A_{2n+3} + A_{2n+5} + A_{2n+7} + \ldots = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} X_{2n} \,.\, \frac{df(x)}{dx}\, dx$$

sich ergeben. Die durch diese Gleichungen ausgedrückten Eigenschaften der Coëfficienten liegen, wie man sieht, sehr nahe und gelten so allgemein als für eine gegebene Function $f(x)$ die Entwickelung nach Kugelfunctionen überhaupt statthaft ist. —

15.

Den so eben gefundenen Gleichungen, welche die Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern der durch A_0, A_1, . . gebildeten Reihen in Form eines Integrals bestimmen, kann man andere zur Seite stellen, welche ähnliche Summen durch Differentialquotienten jener Glieder ausdrücken. Hierzu führt die folgende allgemeine Bemerkung.

Es sei u eine Function der beiden von einander unabhängigen Grössen a und x, ferner seien in der als möglich vorausgesetzten Entwickelung

$$f(u) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots . = \sum_0^\infty A_n X_n$$

die Grössen X Functionen von x von gegebener Form, und A die als Functionen von a zu bestimmenden Coëfficienten der Reihenglieder. Diese Coëfficienten A lassen sich immer unabhängig von der Charakteristik f bestimmen, oder wenigstens durch Gleichungen definiren, in welchen dieselbe direct nicht enthalten ist. Man kann nämlich f dadurch allgemein eliminiren, dass man die angeführte Gleichung partiell einmal nach x und dann nach a differentiirt und sofort $\frac{df(u)}{da}$ wegschafft. Dadurch ergibt sich dann die Gleichung

$$\frac{du}{dx}\left\{X_0 \frac{dA_0}{da} + X_1 \frac{dA_1}{da} + X_2 \frac{dA_2}{da} + \ldots + X_n \frac{dA_n}{da} + \ldots\right\} =$$

$$\frac{du}{da}\left\{A_0 \frac{dX_0}{dx} + A_1 \frac{dX_1}{dx} + A_2 \frac{dX_2}{dx} + \ldots + A_n \frac{dX_n}{dx} + \ldots\right\}.$$

Ich werde unter Annahme besonderer Formen für u einige Anwendungen von dieser Gleichung machen. Die erste derselben sei

$$u = a + x$$

durch welche man, wenn ausserdem noch x^n für X_n gesetzt wird, bekanntlich die Taylorsche Reihe herzuleiten pflegt.

Hier nun sollen die X insgesammt Kugelfunctionen bezeichnen in der bisherigen Bedeutung. Da alsdann die obige Gleichung in

$$X_0 \frac{dA_0}{da} + X_1 \frac{dA_1}{da} + X_2 \frac{dA_2}{da} + \ldots + X_n \frac{dA_n}{da} + \ldots =$$
$$A_0 \frac{dX_0}{dx} + A_1 \frac{dX_1}{dx} + A_2 \frac{dX_2}{dx} + \ldots + A_n \frac{dX_n}{dx} + \ldots$$

übergeht und die sämmtlichen Differentialquotienten der X vermöge der in Art. 2 begründeten Gleichung

$$\frac{dX_n}{dx} = (2n-1)\, X_{n-1} + (2n-5)\, X_{n-3} + (2n-9)\, X_{n-5} + \ldots .$$

sich wieder durch Kugelfunctionen ausdrücken lassen, so kann man den Coëfficienten von X_n aus der Gleichung suchen und gelangt auf diese Weise zu der Relation

$$A_{n+1} + A_{n+3} + A_{n+5} + A_{n+7} + \ldots = \frac{1}{2n+1} \frac{dA_n}{da} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Da aber eben so auch

$$A_{n+3} + A_{n+5} + A_{n+7} + \ldots = \frac{1}{2n+5} \frac{dA_{n+2}}{da}$$

sein muss, so erhält man durch Subtraction der beiden Gleichungen:

$$(2n+5) \frac{dA_n}{da} - (2n+1) \frac{dA_{n+2}}{da} = (2n+5)\,(2n+1)\, A_{n+1}$$

und hieraus folgt zugleich, dass die Coëfficienten A in drei auf einander folgenden Gliedern die merkwürdige Eigenschaft haben, dass

$$\int A_{n+1}\, da = \frac{A_n}{2n+1} - \frac{A_{n+2}}{2n+5} + \text{Const.}$$

ist. — Wenn man ferner die Gleichung (1) und die daraus abgeleitete

$$A_{n+2} + A_{n+4} + A_{n+6} + A_{n+8} + \ldots = \frac{1}{2n+3} \frac{dA_{n+1}}{da}$$

durch Addition verbindet, so findet man

$$A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + \ldots = \frac{1}{2n+1} \frac{dA_n}{da} + \frac{1}{2n+3} \frac{dA_{n+1}}{da}$$

oder, da die Summe linker Hand durch

$$f(a+1) - (A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$$

ausgedrückt werden kann, so hat man, wie sich leicht ergibt:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = f(a+1) - \frac{1}{2n+1} \frac{dA_n}{da} - \frac{1}{2n+3} \frac{dA_{n+1}}{da}$$

so dass man also die Summe der n ersten Glieder der durch die Coëfficienten A gebildeten Reihe durch die Differentialquotienten ihres n^{ten} und $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes ausdrücken kann. Wenn man n ohne Ende wachsen lässt, so erhellt zugleich, dass

$$\lim . \left\{\frac{1}{2n+1}\frac{dA_n}{da} + \frac{1}{2n+3}\frac{dA_{n+1}}{da}\right\} = 0$$

ist. Da aber

$$\int_{-1}^{+1} f(a+x)\, X_n dx = \frac{2A_n}{2n+1}, \quad \int_{-1}^{+1} f(a+x) \,.\, X_{n+1} dx = \frac{2A_{n+1}}{2n+3}$$

so folgt weiter

$$\lim . \int_{-1}^{+1} X_n \frac{df(a+x)}{da}\, dx = 0$$

Es ist eine nothwendige Folge dieser und der weiter oben entwickelten Grenzgleichungen, dass X_n mit wachsendem n ohne Ende abnehme, was sich indessen auch unmittelbar aus einer von Laplace in der méc. cél. V. 5. Livre XI. abgeleiteten Formel ergibt, wonach sich X_n, wenn $x = \cos \theta$ gesetzt wird, für sehr grosse Werthe von n durch den Ausdruck

$$\frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\Theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}\sin\Theta}}$$

ersetzen lässt.

16.

Durch ein Verfahren, welches dem so eben angewendeten durchaus analog ist, findet man ferner

$$A_{2n+1} - A_{2n+2} + A_{2n+3} - A_{2n+4} + \ldots = \frac{1}{4n+1}\frac{dA_{2n}}{da} - \frac{1}{4n+3}\frac{dA_{2n+1}}{da}$$

Da aber

$$A_{2n+1} - A_{2n+2} + A_{2n+3} - A_{2n+4} = A_0 - A_1 + A_2 - \ldots + A_{2n} - f(a-1)$$

so gelangt man zu der Gleichung

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + A_{2n} = f(a-1) + \frac{1}{4n+1}\frac{dA_{2n}}{da} - \frac{1}{4n+3}\frac{dA_{2n+1}}{da}$$

Die bisherigen Ergebnisse führen auch noch zu den beiden Summenformeln

$$A_0 + A_2 + A_4 + A_6 + \ldots + A_{2n} = \frac{f(a+1)+f(a-1)}{2} - \frac{1}{4n+3} \cdot \frac{dA_{2n+1}}{da}$$

$$A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + \ldots + A_{2n+1} = \frac{f(a+1)-f(a-1)}{2} - \frac{1}{4n+1} \cdot \frac{dA_{2n}}{da}$$

wobei

$$\frac{dA_0}{da} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{df(a+x)}{da}\,dx = \frac{f(a+1)-f(a-1)}{2}$$

$$\frac{dA_1}{da} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} x \,.\, \frac{df(a+x)}{da}\,dx = \frac{3}{2}\left\{f(a+1) + f(a-1) - 2A_0\right\}$$

u. s. w.

Der so eben betrachtete Fall, welcher sich auf die Annahme $u = a + x$ bezieht, gibt noch einigen weiteren Erörterungen Raum. Da nämlich

$$\frac{d^r f(a+x)}{dx^r} = \frac{d^r f(a+x)}{da^r}$$

so lassen sich die Betrachtungen des vorigen Art. verallgemeinern. Es sei zunächst $r = 1$ man gehe also von der Gleichung aus

$$X_0 \frac{d^2 A_0}{da^2} + X_1 \frac{d^2 A_1}{da^2} + X_2 \frac{d^2 A_2}{da^2} + \ldots . =$$
$$A_0 \frac{d^2 X_0}{dx^2} + A_1 \frac{d^2 X_1}{dx^2} + A_2 \frac{d^2 X_2}{dx^2} + \ldots .$$

Nun lassen sich, wie in Art. 7 gezeigt wurde, die Differentialquotienten zweiter Ordnung von $X_0, X_1, \ldots$ durch diese Grössen selbst wieder ausdrücken, indem

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} = 1.(2n-1)\,(2n-3)\,X_{n-2} + 2\,(2n-3)\,(2n-7)\,X_{n-3} + \ldots$$

Sucht man daher nach geschehener Substitution aus der vorhergehenden Gleichung die Glieder, welche X_n enthalten, so erhält man

$$\frac{d^2 A_n}{da^2} = (2n+1)\left\{1.(2n+3)\,A_{n+2} + 2\,(2n+5)\,A_{n+4} + 3\,(2n+7)\,A_{n+6} + \ldots\right\}$$

woraus für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ folgt

$$\frac{d^2 A_0}{da^2} = 1.3\,A_2 + 2.5\,A_4 + 3.7\,A_6 + 4.9\,A_8 + \ldots$$
$$\frac{d^2 A_1}{da^2} = 3\left\{1.5\,A_3 + 2.7\,A_5 + 3.9\,A_7 + 4.11\,A_9 + \ldots\right\}$$

u. s. w. Da aber

$$\frac{d^2 A_0}{da^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{df\,(a+1)}{da} - \frac{df\,(a-1)}{da}\right\}$$
$$\frac{d^2 A_1}{da^2} = \frac{3}{2}\left\{\frac{df\,(a+1)}{da} - \frac{df\,(a-1)}{da} - f\,(a+1) + f\,(a-1)\right\}$$

so kann man also durch die Differentialquotienten

$$\frac{df\,(a+1)}{da}, \quad \frac{df\,(a-1)}{da}$$

die Reihen rechter Hand summiren.

Für $r = 3$ erhält man, ebenfalls mit Rücksicht auf die Formeln des Art. 7

$$\frac{d^3 A_n}{da^3} = (2n+1)\Big\{1.(2n+1)\,(2n+5)\,A_{n+3} + 3\,(2n+5)\,(2n+7)\,A_{n+5}$$
$$+ 6\,(2n+7)\,(2n+9)\,A_{n+7} + 10\,(2n+9)\,(2n+11)\,A_{n+9} + \ldots\Big\}$$

Diese Gleichungen, welchen die Entwickelung

$$f(a+x) = A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + \ldots$$

zu Grunde liegt, liessen sich leicht noch vermehren; die bisher angeführten, auf welche ich mich beschränke, mögen hinreichen, die Behauptung zu rechtfertigen, dass nicht nur den Kugelfunctionen X sondern auch den Entwickelungs-Coëfficienten A eigenthümliche Sätze entsprechen.

Wie von den bisher gefundenen Resultaten in besonderen Fällen, wenn z. B. einer der Ausdrücke

$$(a+x)^m, \quad \log(a+x), \quad e^{a+x}$$

für $f(a+x)$ gesetzt würde, Anwendung zu machen ist, bedarf keiner nähern Auseinandersetzung.

17.

Zu einer weitern Anwendung der allgemeinen Gleichung des Art. 15 nehme man an, es werde

$$u = ax$$

gesetzt; es entsteht dann die Bedingungsgleichung

$$a\left\{X_0 \frac{dA_0}{da} + X_1 \frac{dA_1}{da} + X_2 \frac{dA_2}{da} + \ldots\right\} =$$
$$x\left\{A_0 \frac{dX_0}{dx} + A_1 \frac{dX_1}{dx} + A_2 \frac{dX_2}{dx} + \ldots\right\}$$

Da nun, wie in Art. 2 gezeigt worden ist,

$$x\frac{dX_n}{dx} = nX_n + (2n-3)\,X_{n-2} + (2n-7)\,X_{n-4} + \ldots$$

so können in jener Gleichung alle Glieder in linearer Weise durch die Functionen X ausgedrückt werden und wenn dies geschehen ist, so kann man die Coëfficienten von X_n auf beiden Seiten jener Gleichung heraussuchen und gelangt auf diesem Wege unmittelbar zu der Relation

$$a\frac{dA_n}{da} = nA_n + (2n+1)\left\{A_{n+2} + A_{n+4} + A_{n+6} + \ldots\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Bemerkt man nun, dass für $x = +1$ und $x = -1$

$$f(a) \quad = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + \ldots$$
$$f(-a) = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + (-1)^n A_n + \ldots$$

und dass also

$$A_{2n+2} + A_{2n+4} + A_{2n+6} + \ldots = \frac{f(a)+f(-a)}{2} - (A_0 + A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n})$$

$$A_{2n+3} + A_{2n+5} + A_{2n+7} + \ldots = \frac{f(a)-f(-a)}{2} - (A_1 + A_3 + A_5 + \ldots + A_{2n+1})$$

so ergeben sich aus (1), wenn man darin einmal $2n$ und dann $2n+1$ für n setzt und jene Gleichung mit den beiden letzteren verbindet, die folgenden Formeln:

$$A_0 + A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n} = \frac{f(a)+f(-a)}{2} + \frac{1}{4n+1}\left(2n\,A_{2n} - a\frac{dA_{2n}}{da}\right)$$

$$A_1 + A_3 + A_5 + \ldots + A_{2n+1} = \frac{f(a)-f(-a)}{2} + \frac{1}{4n+3}\left((2n+1)\,A_{2n+1} - a\frac{dA_{2n+1}}{da}\right)$$

Es ist nicht ohne Interesse diese beiden Gleichungen auch noch auf dem folgenden, von dem vorigen gänzlich abweichenden Wege herzuleiten. — Die Coëfficienten A_n sind wie bekannt durch die Gleichung

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(ax)\, X_n\, dx$$

bestimmt. Differentiirt man dieselbe nach a, wodurch sie in

$$\frac{dA_n}{da} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} x f^1(ax)\, X_n dx$$

übergeht, bemerkt man ferner, dass

$$(2n+1)\, x X_n = n X_{n-1} + (n+1)\, X_{n+1}$$

so kann man das Integral in zwei andere Integrale zerlegen und erhält

$$2\frac{dA_n}{da} = n \int_{-1}^{+1} X_{n-1} f'\,(ax)\, dx + (n+1) \int_{-1}^{+1} X_{n+1} f'\,(ax)\, dx$$

woraus man durch theilweises Integriren weiter findet

$$\frac{dA_n}{da} = \frac{2n+1}{2a} \left\{ f(a) + (-1)^n f(-a) \right\} - \frac{n}{2a} \int_{-1}^{+1} f(ax) \frac{dX_{n-1}}{dx} dx - \frac{n+1}{2a} \int_{-1}^{+1} f(ax) \frac{dX_{n+1}}{dx} dx$$

Drückt man nun die beiden Differentialquotienten von X_{n-1} und X_{n+1} gemäss den in Art. 2 entwickelten Formeln durch die Functionen X aus, so wird man finden

$$\frac{dA_n}{da} = \frac{2n+1}{2a} \left\{ f(a) + (-1)^n f(-a) \right\} - \frac{n}{2a} \int_{-1}^{+1} f(ax) \left\{ (2n-3)\, X_{n-2} + (2n-7)\, X_{n-4} + \ldots \right\} dx$$
$$- \frac{n+1}{2a} \int_{-1}^{+1} f(ax) \left\{ (2n+1)\, X_n \quad + (2n-3)\, X_{n-2} + \ldots \right\} dx$$

Die Integrale aber lassen sich durch die Coëfficienten A ausdrücken, folglich hat man

$$\frac{a}{2n+1} \cdot \frac{dA_n}{da} = \frac{f(a) + (-1)^n f(-a)}{2} + \frac{n\,(2n+1)}{4} A_n - (A_n + A_{n-2} + A_{n-4} + \ldots)$$

Es bedarf keiner Auseinandersetzung was nun weiter zu thun sei, um die beiden Formeln herzustellen, welche sich auf dem früher eingeschlagenen Wege ergeben haben.

Wie die auf die Annahme $u = ax$ sich beziehenden Gleichungen dieses Art. in besonderen Fällen, z. B. wenn einer der Ausdrücke

$$(1+ax)^m, \quad \cos ax, \quad \sin ax, \quad e^{ax} \ldots$$

für $f(ax)$ gesetzt würde, anzuwenden wären, bedarf eben so wenig einer nähern Bezeichnung.

18.

Als dritten besondern Fall der allgemeinen Gleichung des Art. 15 will ich annehmen, es sei

$$u = 1 - 2xa + a^2$$

also

$$\frac{du}{dx} = -2a \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2\,(a-x)$$

Man erhält dann als Bedingungsgleichung für die Coëfficienten

$$a \left\{ X_0 \frac{dA_0}{da} + X_1 \frac{dA_1}{da} + X_2 \frac{dA_2}{da} + \ldots + X_n \frac{dA_n}{da} + \ldots \right\} =$$
$$(x-a) \left\{ A_0 \frac{dX_0}{dx} + A_1 \frac{dX_1}{dx} + A_2 \frac{dX_2}{dx} + \ldots + A_n \frac{dX_n}{dx} + \ldots \right\}$$

Man kann nun das im vorigen Beispiele bezeichnete Verfahren benutzen, um sowohl die Grösse x als auch die Differentialquotienten der X fortzuschaffen. Ist dieses geschehen, so suche man die Coëfficienten von X_n heraus, zwischen welchen dann die folgende Gleichung

$$(aA_{n+1} - A_{n+2}) + (aA_{n+3} - A_{n+4}) + (aA_{n+5} - A_{n+6}) + \ldots = \frac{1}{2n+1}\left(nA_n - a\frac{dA_n}{da}\right) \quad . \quad . \quad (1)$$

stattfinden muss. Die in's Unendliche gehende Reihe kann also durch das Glied A_n und seinen Differentialquotienten summirt werden. Eine sehr leichte Verification dieses bemerkenswerthen Resultats ergibt sich, wenn man beispielsweise

$$f(u) = u^{-\frac{1}{2}}$$

setzt, wofür

$$A_n = a^n, \frac{dA_n}{da} = na^{n-1}$$

ist und die Gleichung in eine Identität übergeht.

Es ist nicht schwer, auch die Summe der n ersten Glieder der A in ähnlicher Weise auszudrücken. Man braucht zu dem Ende in der Gleichung

$$f(1 - 2ax + a^2) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots .$$

nur $x = +1$ und $x = -1$ zu setzen, so führen die beiden hieraus entstehenden Gleichungen

$$f\,[(1-a)^2] = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots .$$
$$f\,[(1+a)^2] = A_0 - A_1 + A_2 - \ldots .$$

zu den beiden folgenden

$$A_{2n+1} + A_{2n+3} + A_{2n+5} + \ldots = \frac{f\,[(1-a)^2] - f\,[(1+a)^2]}{2} - (A_1 + A_3 + A_5 + \ldots + A_{2n-1})$$

$$A_{2n+1} + A_{2n+4} + A_{2n+6} + \ldots = \frac{f\,[(1-a)^2] + f\,[(1+a)^2]}{2} - (A_0 + A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n})$$

und es ist nun leicht, aus (1) die Gleichung

$$(A_0 - aA_1) + (A_2 - aA_3) + (A_4 - aA_5) + \ldots + (A_{2n-2} - aA_{2n-1})$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(1-a) f_{(1-a)^2} + (1+a) f_{(1+a)^2}\right\} - \frac{1}{4n+1}\left\{(2n+1)\, A_{2n} + a\,\frac{dA_{2n}}{da}\right\}$$

abzuleiten. — Diese Gleichung kann aber auch auf dem folgenden Wege erhalten werden. Indem man nämlich, analog wie im vorigen Art. aus

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(1 - 2\,xa + a^2)\, X_n\, dx$$

durch Differentiiren die Formel

$$\frac{dA_n}{da} = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{df(u)}{da}\, X_n\, dx$$

ableitet, und bemerkt, dass

$$\frac{df(u)}{da} = \frac{x-a}{a}\,\frac{df(u)}{dx}$$

so erhält man

$$\frac{dA_n}{da} = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} x\, X_n\, \frac{df(u)}{dx}\, dx - \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} X_n\, \frac{df(u)}{dx}\, dx$$

Im ersten Integral ersetze man $(2n+1)\, x\, X_n$ durch $n\, X_{n-1} + (n+1)\, X_{n+1}$, unterwerfe die ganze rechte Seite der Gleichung der theilweisen Integration und berücksichtige die im Art. 14 bewiesene Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,.\,\frac{dX_m}{dx}\, dx = 2\left\{A_{m-1} + A_{m-3} + A_{m-5} + \ldots\right\}$$

so wird man bald zu dem durch die frühere Betrachtung gefundenen Resultate wieder gelangen.

Dieses Resultat aber ist, in gewissem Sinne, einer Verallgemeinerung fähig.

Setzt man nämlich

$$u = \varphi(a) + x\psi(a)$$

wofür

$$\frac{df(u)}{da} = \frac{df(u)}{dx}\left(\frac{\varphi'(a)}{\psi(a)} + x\,\frac{\psi'(a)}{\psi(a)}\right)$$

und

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f\,[\varphi(a) + x\psi(a)]\, X_n\, dx$$

ist, so kann man offenbar auch schreiben

$$\frac{dA_n}{da} = \frac{2n+1}{2\psi(a)}\int_{-1}^{+1} [\varphi'(a) + x\psi'(a)]\, X_n\, \frac{df(u)}{dx}\, dx$$

und dieser Gleichung die Form geben

$$\frac{dA_n}{da} = \frac{2n+1}{2}\frac{\varphi'(a)}{\psi(a)}\int_{-1}^{+1} X_n \frac{df(u)}{dx}\,dx + \frac{1}{2}\frac{\psi'(a)}{\psi(a)}\int_{-1}^{+1}[n X_{n-1} + (n+1) X_{n+1}]\frac{df(u)}{dx}\,dx$$

Integrirt man wieder theilweise und verfährt überhaupt ganz analog, wie in den beiden vorhergehenden Art., so wird man finden

$$\begin{aligned}[A_n + A_{n-2} + A_{n-4} + A_{n-6} + \ldots]\,\psi'(a) + [A_{n-1} + A_{n-3} + A_{n-5} + A_{n-7} + \ldots]\,\varphi'(a) \\ = [\varphi'(a) + \psi'(a)]\,f_{(\varphi(a)+\psi(a))} + (-1)^{n-1}\,[\varphi'(a) - \psi'(a)]\,f_{(\varphi(a)-\psi(a))} \\ + \frac{2n}{2n+1}\,\psi'(a)\,A_n - \frac{2\psi(a)}{2n+1}\cdot\frac{dA_n}{da}\end{aligned}$$

Wenn in dieser verallgemeinerten Formel $\varphi(a) = 1 + a^2$ und $\psi(a) = -2a$ ist, so erhält man die oben angegebenen Resultate wieder.

19.

Die Entwickelungscoëfficienten A, von welchen bisher die Rede war, haben noch eine andere Eigenschaft, welche, obgleich sehr nahe liegend, doch nicht bemerkt worden zu sein scheint und interessant genug ist, um in Kürze erwähnt zu werden. — Sind nämlich die Entwickelungen zweier Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nach Kugelfunctionen gegeben:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= A_0 X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_n X_n + \ldots \\ \psi(x) &= B_0 X_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + \ldots + B_n X_n + \ldots\end{aligned}$$

werden diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt und integrirt man die daraus hervorgehende Gleichung zwischen den Grenzen -1 und $+1$, so ist das Resultat dieser Operationen offenbar in der Gleichung

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \sum_0^\infty A_n B_n \int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx$$

enthalten. Das rechter Hand allein stehen gebliebene Integral hat $\frac{2}{2n+1}$ zum Werth, so dass sich die ganze rechte Seite auf

$$\sum_0^\infty \frac{2A_n B_n}{2n+1}$$

reducirt. Der hierdurch bewiesene Satz lässt sich also in folgender Weise ausdrücken:

Wenn

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,X_n dx,\quad B_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)\,X_n dx$$

gegeben sind, so ist

$$A_0 B_0 + \frac{1}{3}A_1 B_1 + \frac{1}{5}A_2 B_2 + \ldots + \frac{1}{2n+1}A_n B_n + \ldots = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

Dieser auf die Entwickelungen nach Kugelfunctionen sich beziehende Satz ist jenem von Parseval (Mém. présentés T. I. Paris 1805, p. 638), welcher für die nach Potenzen fort-

schreitenden Reihen gilt, ganz analog. Er lässt sich leicht durch die folgenden, sehr einfachen Beispiele verificiren. Setzt man

$$\varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$$

so ist

$$A_n = B_n = z^n$$

und

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \frac{1}{z} \log \frac{1+z}{1-z}$$

so dass man die Gleichung erhält

$$1 + \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{5} z^4 + \frac{1}{7} z^6 + \ldots = \frac{1}{2z} \log \frac{1+z}{1-z}$$

welche bekanntlich gilt, so lange $-1 < z < +1$ ist.

Nimmt man an, es sei

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2xz + z^2}} \quad , \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$$

so ist

$$A_{2n} = z^{2n} \quad , \quad B_{2n} = + z^{2n}$$
$$A_{2n+1} = z^{2n+1} \quad , \quad B_{2n+1} = - z^{2n+1}$$

und man hat

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1+z^2)^2 - 4z^2 x^2}} = \frac{1}{z} \text{ arc sin } \frac{2z}{1+z^2}$$

oder also

$$= \frac{2}{z} \text{ arc tang } z$$

Der obige Satz liefert hierfür die Gleichung

$$1 - \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{5} z^4 - \frac{1}{7} z^6 + \ldots = \frac{1}{z} \text{ arc tang } z$$

welche, wie ebenfalls bekannt, richtig ist, so lange $-1 < z < +1$ bleibt.

Endlich sei

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xb + b^2}}$$

Da nun, wie ich fand, allgemein

$$A_{2n} = \pi \cdot \frac{4n+1}{2^{4n+1}} \left[\frac{(n+1)\,(n+2)\ldots 2n}{1\,.\,2\ldots n}\right]^2 \quad , \quad A_{2n+1} = 0$$

also auch

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2} \left\{1 + \sum_1^\infty \frac{4n+1}{4^{2n}} \left[\frac{(n+1)\,(n+2)\ldots 2n}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}\right]^2 . \; X_{2n}\right\}$$

und da

$$B_n = b^n$$

ist, so hat man die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2xb + b^2} \,.\, \sqrt{1 - x^2}} = \pi \left\{1 + \sum_1^\infty \left[\frac{(n+1)\,(n+2)\ldots 2n}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}\right]^2 . \left(\frac{b}{4}\right)^{2n}\right\}$$

Indem ich die vorliegende Arbeit hiermit beschliesse, behalte ich mir die Anwendung mancher darin nur im Allgemeinen besprochener Sätze für eine spätere Gelegenheit vor.